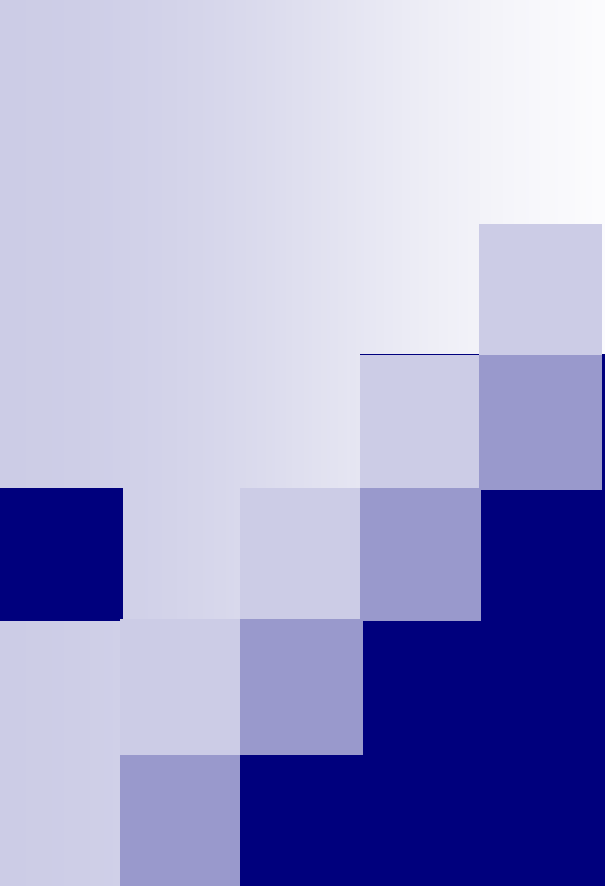
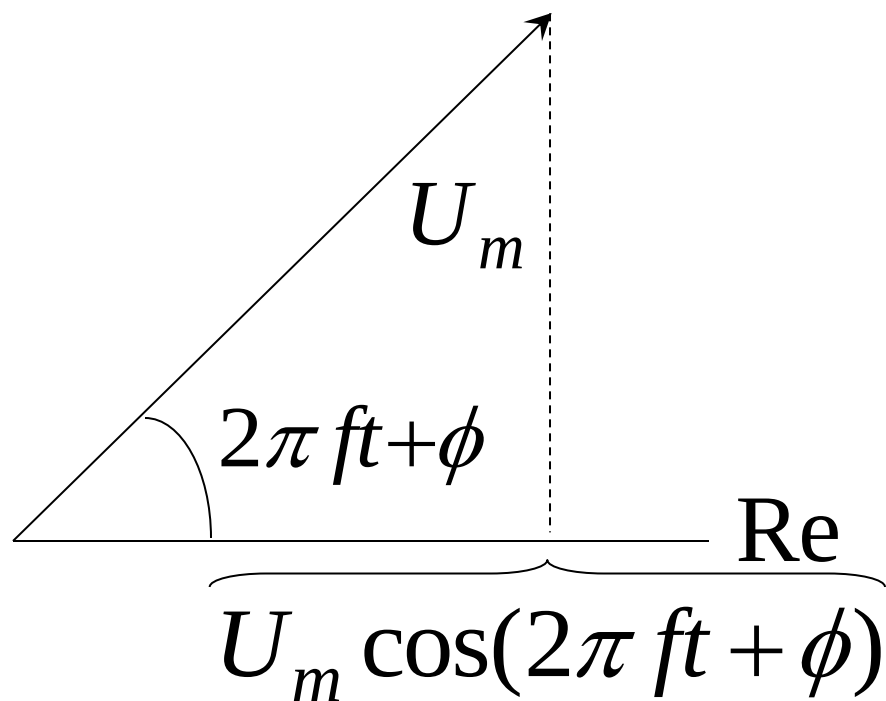




Аналитикалық сигнал

Комплексті амплитуда әдісі

$$U_m \cos(2\pi ft + \phi) \longrightarrow U_m e^{j(2\pi ft + \phi)}$$



$$x(t) = \text{Re}\{z(t)\}$$

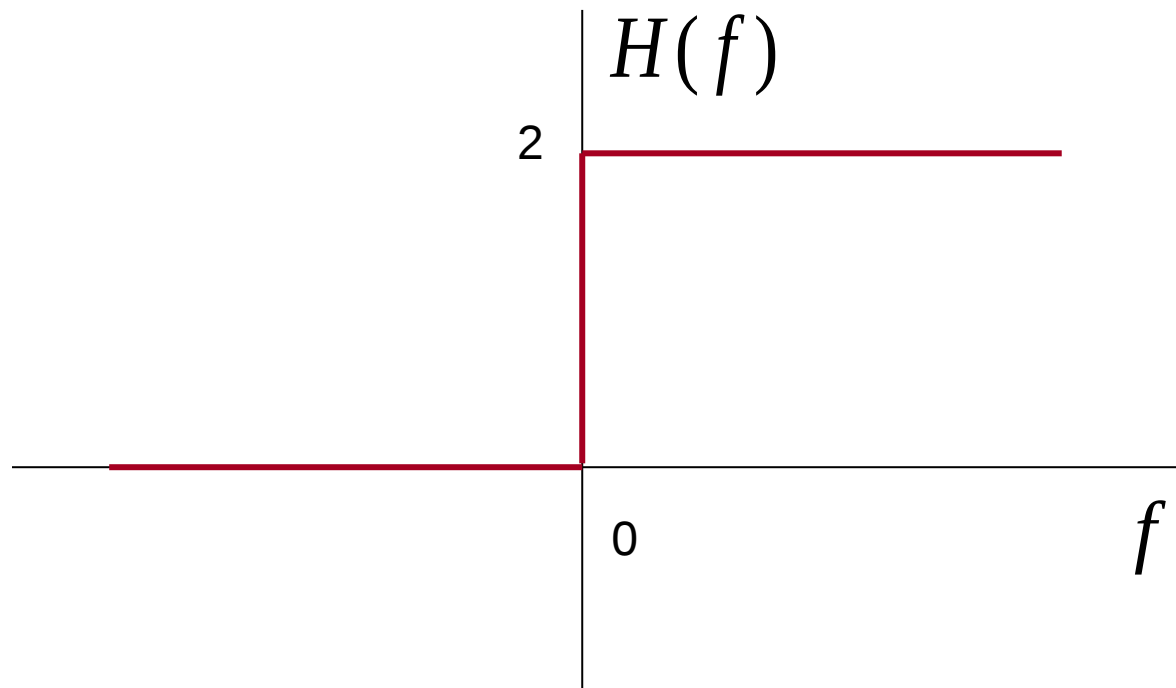
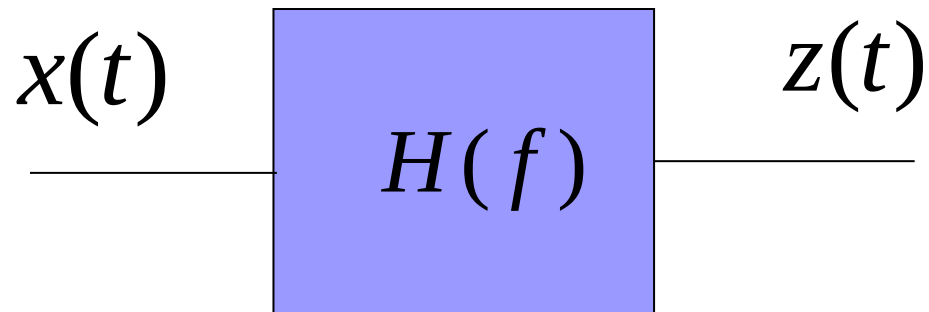
Ерікті толқын пішіндері гармоникадан
«құрылады».

$$U_m \cos(2\pi ft + \phi) = U_m \frac{e^{j(2\pi ft + \phi)} + e^{-j(2\pi ft + \phi)}}{2}$$

$$U_m \cos(2\pi ft + \phi) \longrightarrow U_m e^{j(2\pi ft + \phi)}$$

теріс жиілік компонентін басу және оң жиілік
компонентін екі еселеу керектігі шығады

Аналитикалық сигналды алу

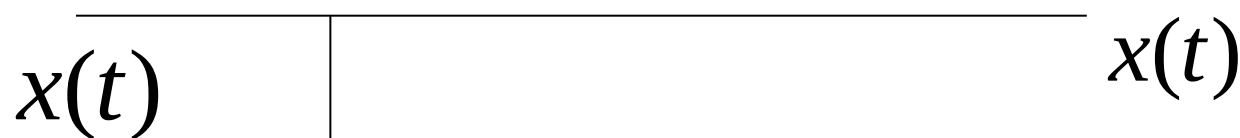


басқа жолы:

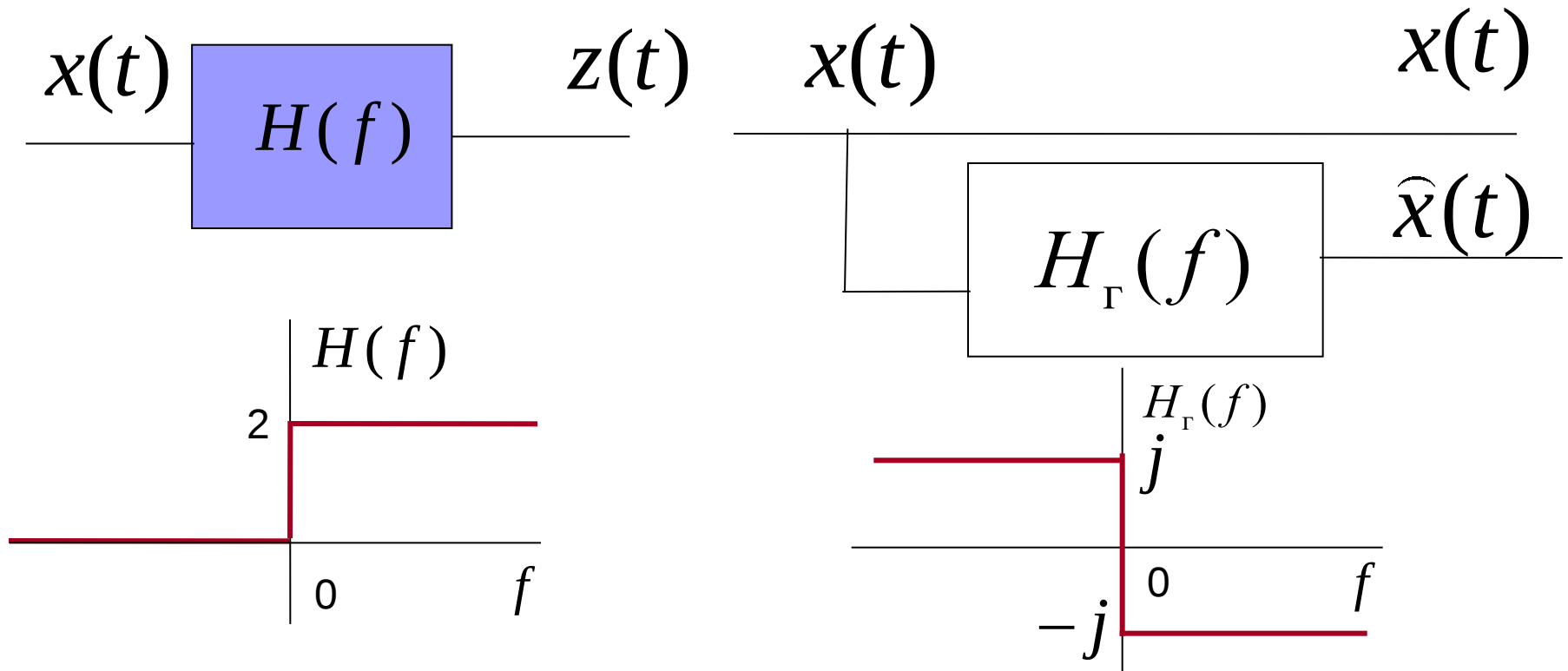
$$U_m \cos(2\pi ft + \phi) \longrightarrow U_m e^{j(2\pi ft + \phi)}$$

мына түрде жазуға болады

$$U_m \cos(2\pi ft + \phi) \longrightarrow U_m \cos(2\pi ft + \phi) + jU_m \sin(2\pi ft + \phi)$$



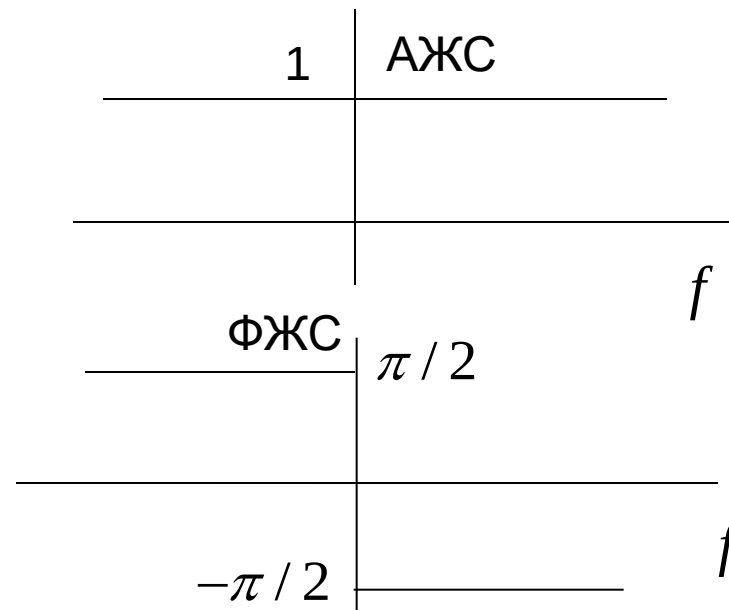
$$z(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$$



$$\begin{aligned}
 f < 0: j\hat{X}(f) &= -X(f) \\
 f \geq 0: j\hat{X}(f) &= X(f)
 \end{aligned}
 \longrightarrow
 \begin{cases}
 \hat{X}(f) = jX(f) \\
 \hat{X}(f) = -jX(f)
 \end{cases}$$

Сүзгі түрлендіргішінің сипаттамалары

$$H_{\Gamma}(f) = \begin{cases} j, f < 0, \\ -j, f \geq 0. \end{cases}$$

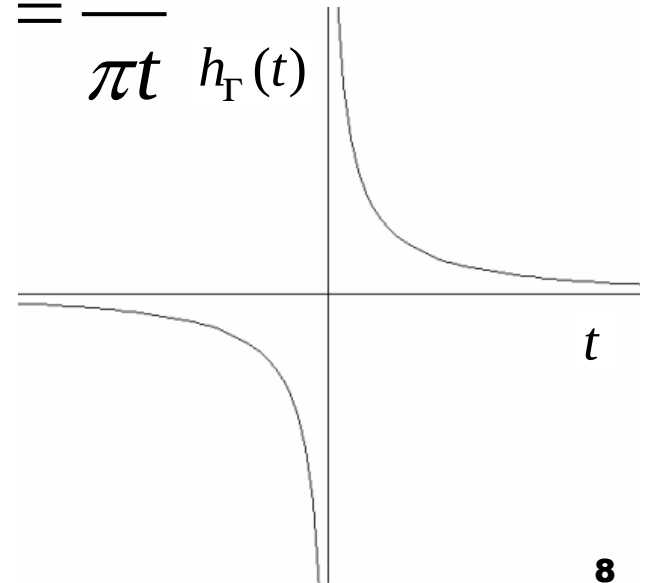


$$h_{\Gamma}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{j2\pi ft} df =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^0 j e^{\varepsilon f} e^{j2\pi ft} df + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\infty} -j e^{-\varepsilon f} e^{j2\pi ft} df =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[j \int_{-\infty}^0 e^{(\varepsilon + j2\pi t)f} df - j \int_0^{\infty} e^{(-\varepsilon + j2\pi t)f} df \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[j \int_{-\infty}^0 e^{(\varepsilon + j2\pi t)f} df - j \int_0^{\infty} e^{(-\varepsilon + j2\pi t)f} df \right] = \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ j \left[\frac{1}{\varepsilon + j2\pi t} e^{(\varepsilon + j2\pi t)f} \Big|_{-\infty}^0 - \frac{1}{-\varepsilon + j2\pi t} e^{(-\varepsilon + j2\pi t)f} \Big|_0^{\infty} \right] \right\} = \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ j \left[\frac{1}{\varepsilon + j2\pi t} + \frac{1}{-\varepsilon + j2\pi t} \right] \right\} = \frac{1}{\pi t} h_T(t)
\end{aligned}$$



$$\hat{x}(t) = x(t) * h_T(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h_T(t - \tau) d\tau$$

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad x(t) = -\hat{x}(t) * h_T(t)$$

$$x(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{x}(\tau)}{\tau - t} d\tau$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{x}(s)}{s - t} ds \\ \hat{x}(s) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t)}{s - t} dt \end{array} \right.$$

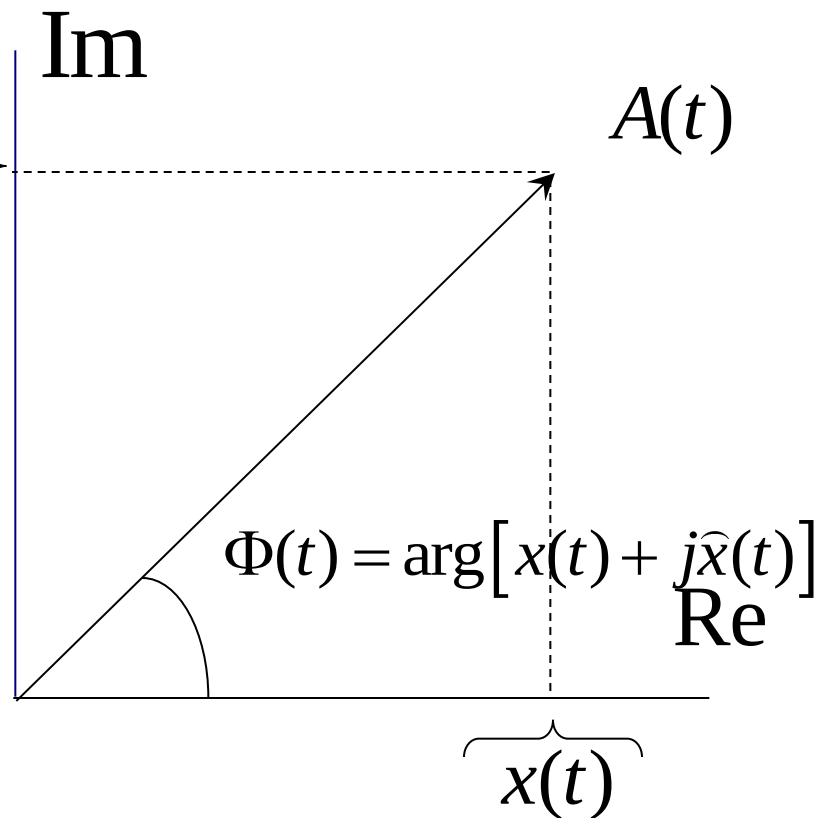
Гильберт түрлендіруінің
жұбы

Экспоненциалды түрдегі аналитикалық сигнал

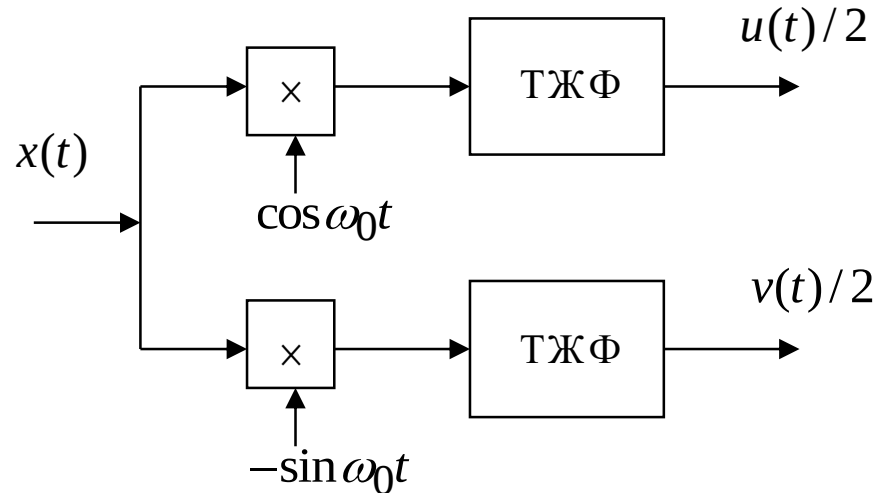
$$z(t) = A(t)e^{j\Phi(t)} \quad \hat{x}(t)$$

период жиілік:

$$\omega = \frac{d\Phi(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \operatorname{Im} \{ \ln z(t) \}$$



Квадратуралық компоненттерін анықтау



$$x(t) \cos(2\pi F_0 t) =$$

$$= u(t) \cos^2(2\pi F_0 t) - v(t) \sin(2\pi F_0 t) \cos(2\pi F_0 t) =$$

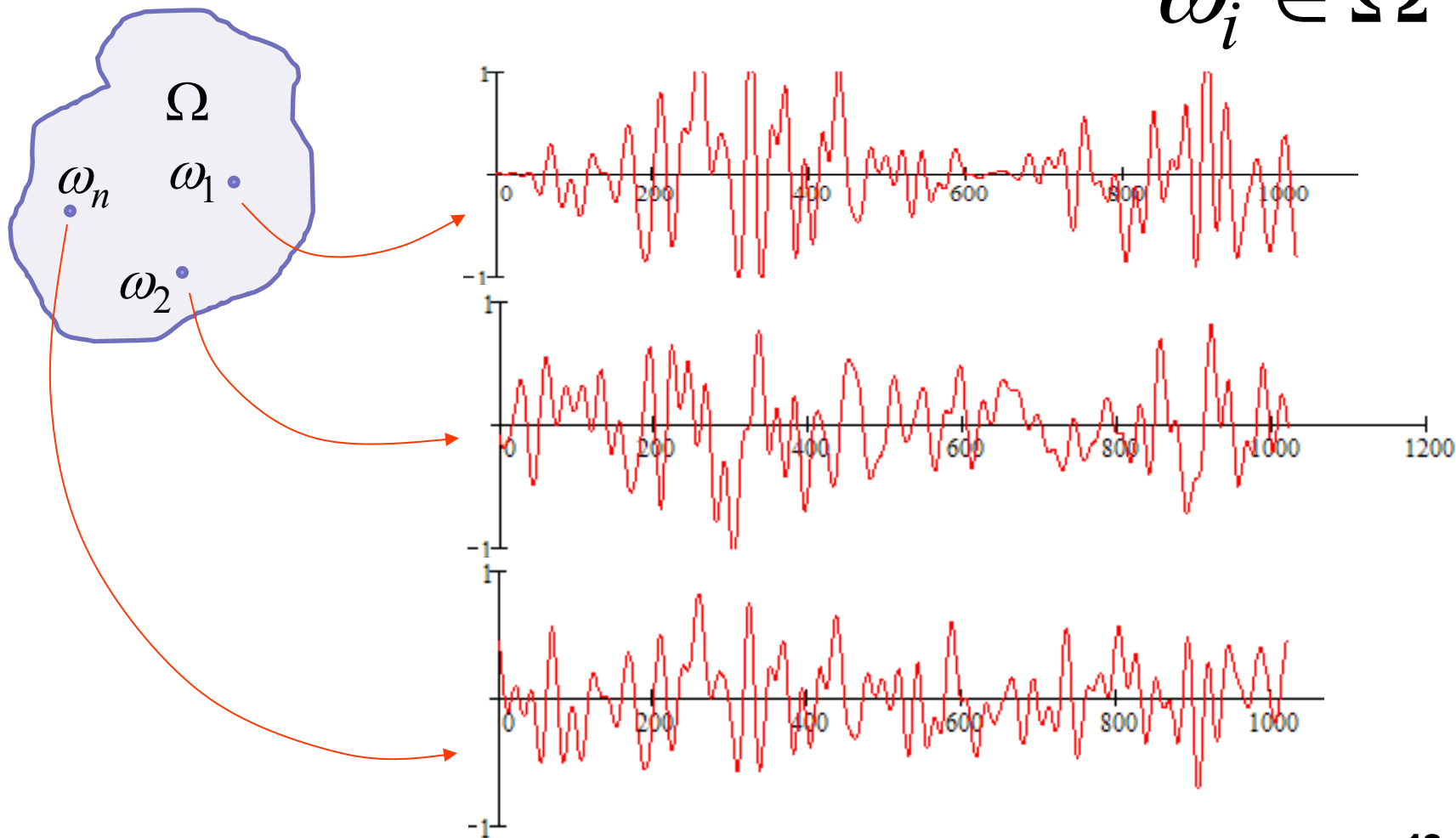
$$= u(t) \frac{(1 + \cos(2 \cdot 2\pi F_0 t))}{2} - v(t) \frac{\sin(2 \cdot 2\pi F_0 t)}{2} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{ТЖФ}} \frac{u(t)}{2}$$

Кездейсоқ процесс

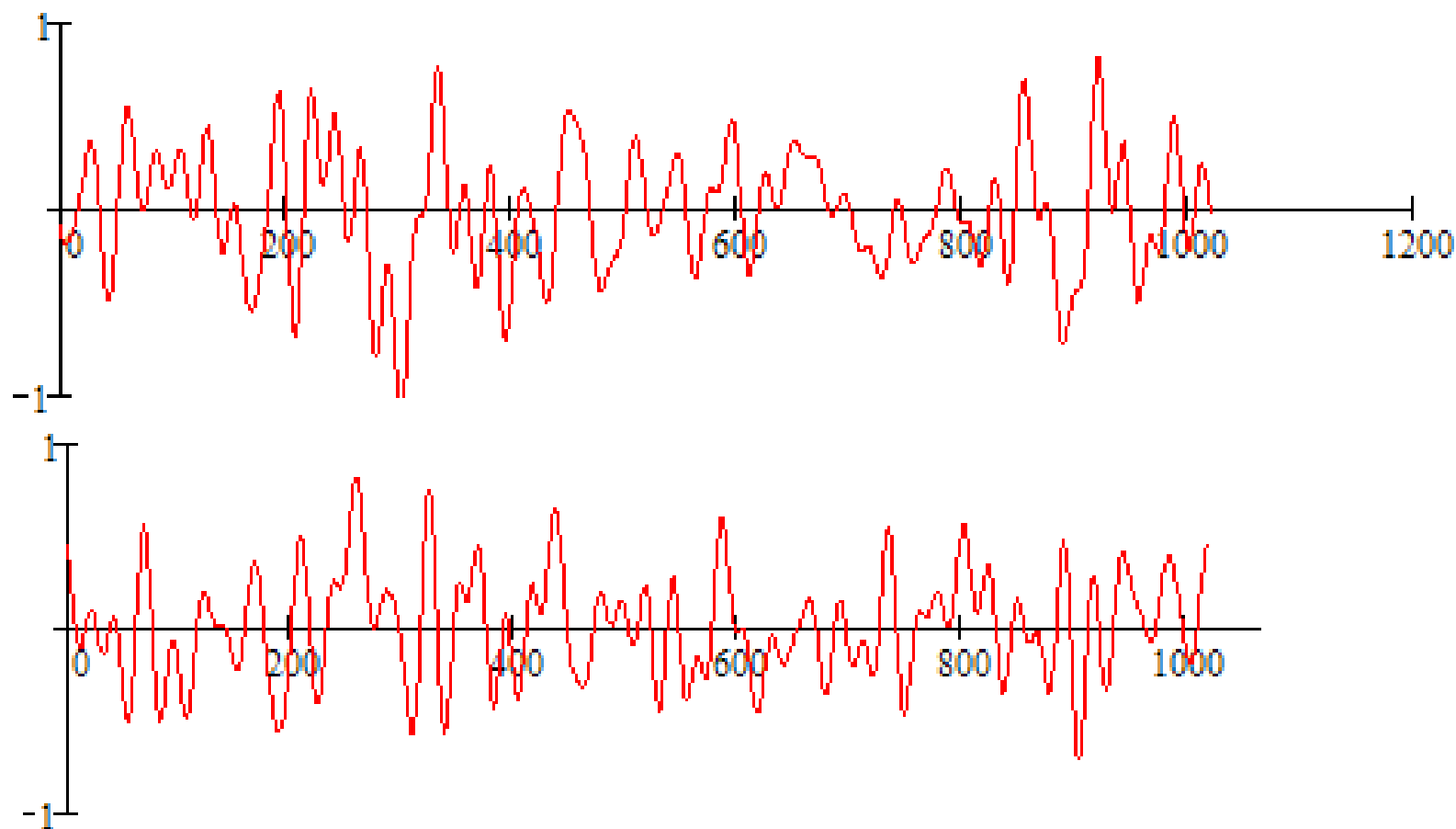
ω_i – кездейсоқ оқиға

$$\omega_i \in \Omega$$

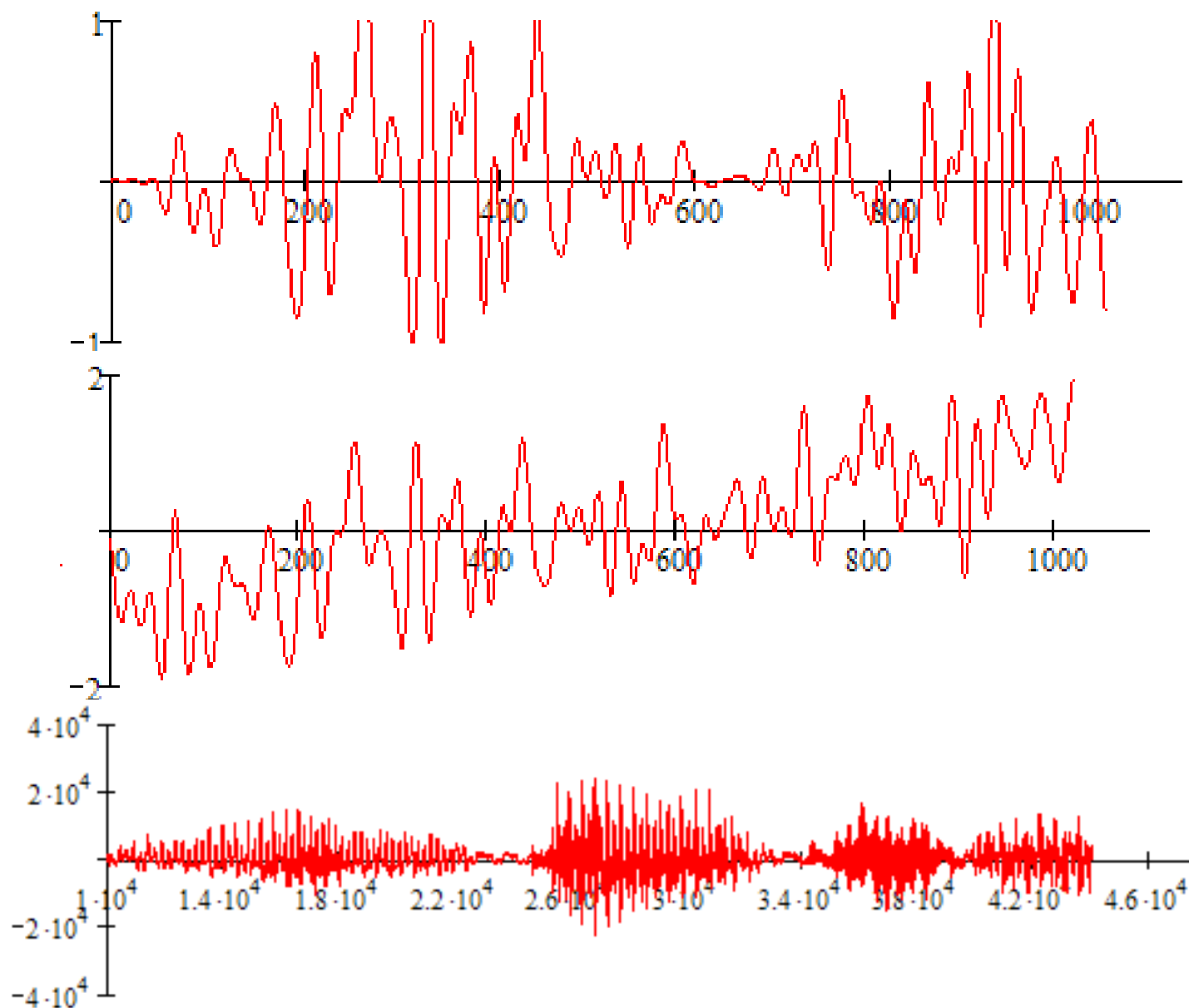


Стационарлы кездейсоқ процесс

Барлық уақыт қималарының бірдей шамаға бір мезгілде ығысуымен бірлескен n -өлшемді ықтималдықтың таралу тығыздығы өзгермейтін кездейсоқ процесс **стационар** деп аталады.



Стационарлық емес процестерді жүзеге асыру мысалдары



Іс жүзінде, егер КП стационарлы емес болса, онда оның бақыланатын сегментінен осы сегменттен тыс әрекеті туралы ештеңе айтуға болмайды.

Стационарлы кездейсоқ процесс өзгермейтін параметрлері

$$m_x(t) = m_x$$

$$R_x(t_1, t_2) = R_x(t_2 - t_1) = R_x(\tau)$$

$$R_x(0) = D_x$$

$$m_k = \langle [x(t)]^k \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [\xi(t)]^k dt$$

$$m = \langle x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t) dt$$

$$M_k = \langle [x(t) - m]^k \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [\xi(t) - m]^k dt$$

$$D = \langle [x(t) - m]^2 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [\xi(t) - m]^2 dt$$

AKΦ

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \langle [x(t) - m][x(t + \tau) - m] \rangle = \langle x(t)x(t + \tau) \rangle - m^2 = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t)\xi(t + \tau) dt - m^2. \end{aligned}$$

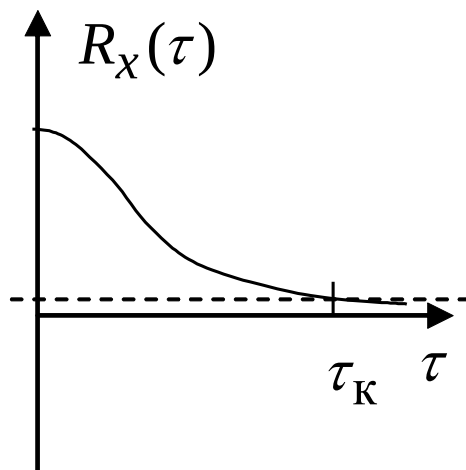
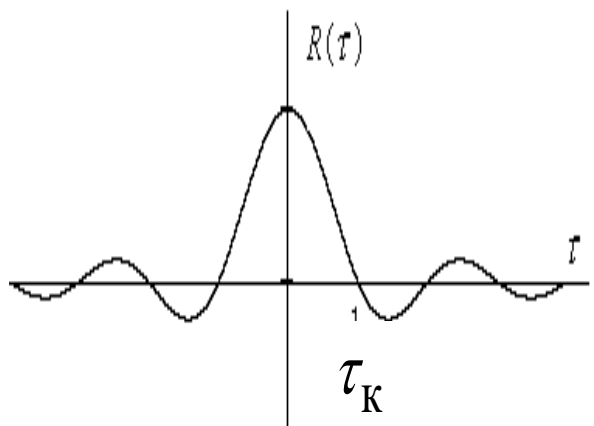
$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R(\tau) = 0$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T R(\tau) d\tau = 0$$

δ -функцияның сүзу қасиетін ескеру

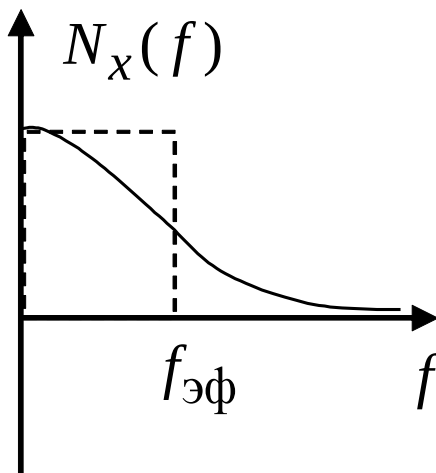
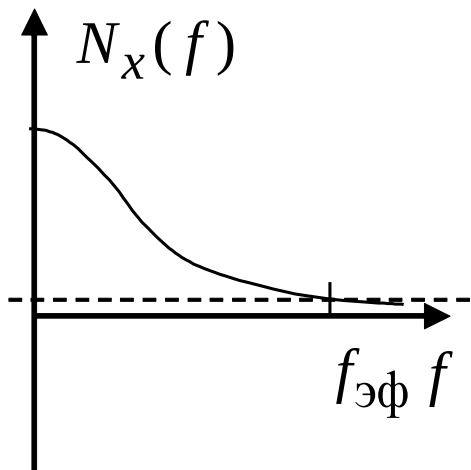
$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} W_x(f) e^{j2\pi f\tau} df \\ W_x(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} R_x(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} W_x(f) e^{j2\pi f\tau} df \\ W_x(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \end{aligned}} \right\} \text{Винер–Хинчин теоремасы}$$
$$R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} W_x(f) df \quad R_x(0) = D_x$$

Корреляция інтервали



$$\tau_K = \frac{\int_0^{\infty} R_X(\tau) d\tau}{R_X(0)}$$

тиімді спектр ені

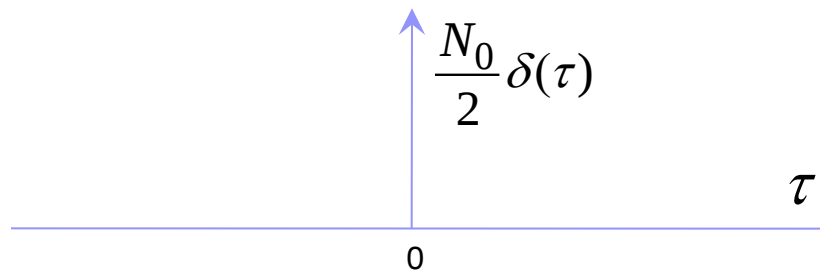


$$f_{\text{эф}} = \frac{\int_0^{\infty} N_X(f) df}{N_X(0)}$$

Шуыл модельдері. Ақ шуыл

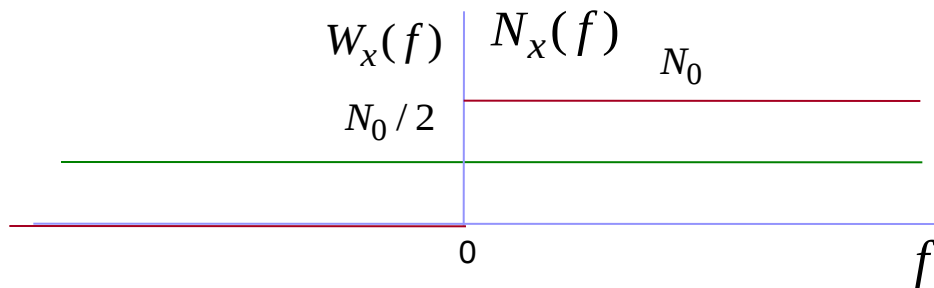
– нөлдік орташа және форманың АКФ стационарлық кездейсоқ процесс

$$R_x(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$$



Спектрі

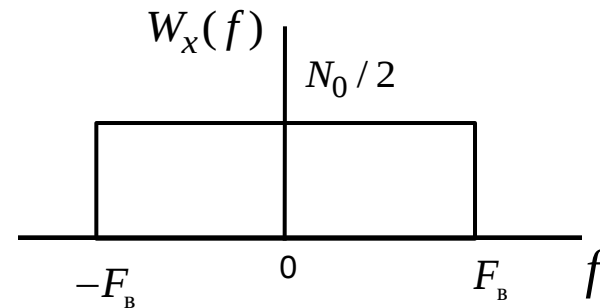
$$W_x(f) = N_0 / 2$$



δ

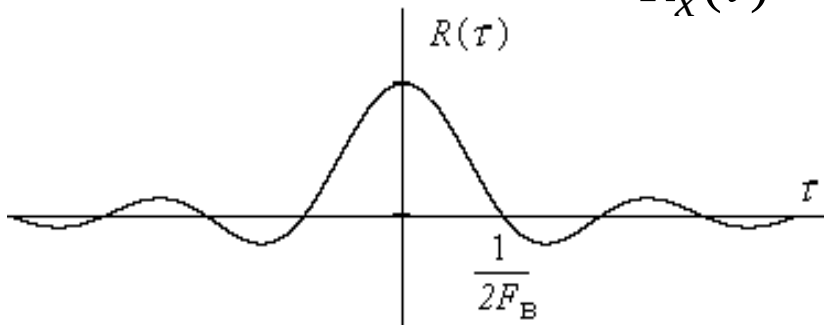
Квазиақ шуыл

$$W_x(f) = \begin{cases} N_0 / 2 & \text{кезінде } |f| < F_B, \\ 0 & \text{баска жагдайларда.} \end{cases}$$



АКФ –

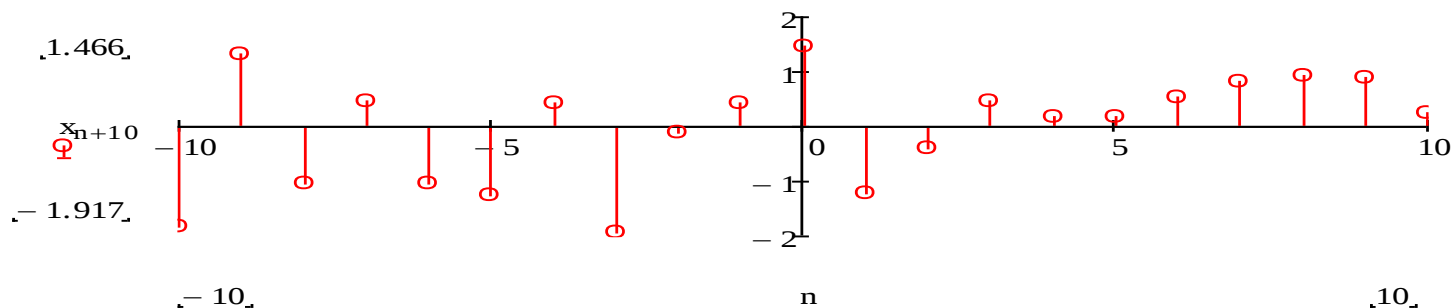
$$R_x(\tau) = \frac{N_0}{2} \int_{-F_B}^{F_B} \cos(2\pi\tau) df = F_B N_0 \frac{\sin(2\pi F_B \tau)}{2\pi F_B \tau}$$



Дискретті кездейсоқ процесс

дискретті уақытты кездейсоқ процесс

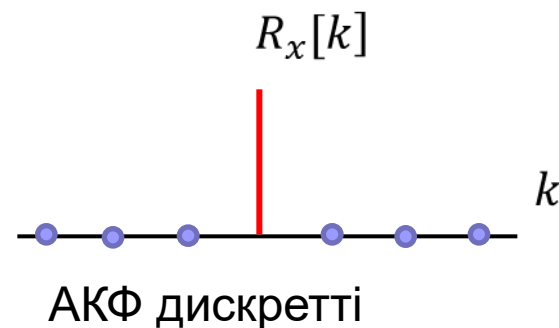
$$x[n], n = \overline{-\infty, +\infty}$$



$$R_x[k] = \overline{x[n]x[n+k]} = \overline{x[n]^* x[n+k]}$$

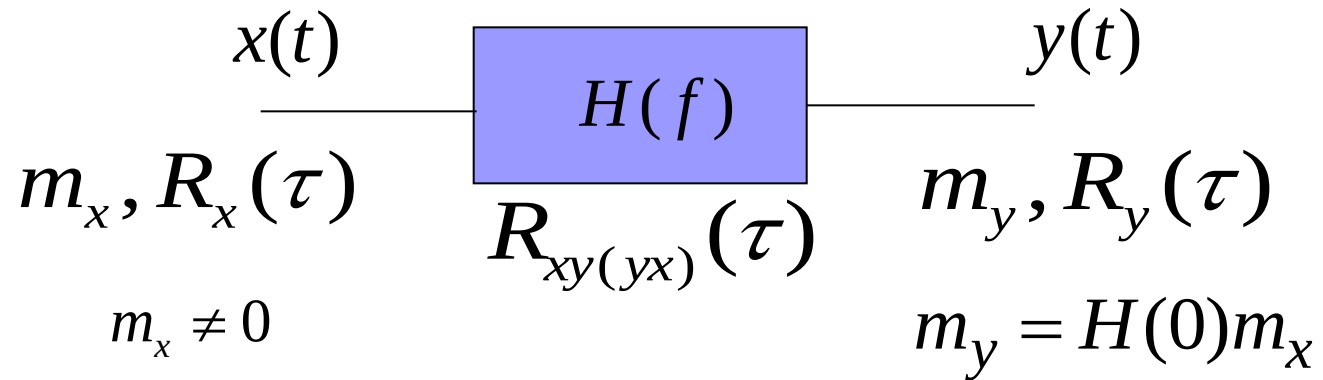
$$W_x(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_x[k] e^{-j\omega k}$$

$$R_x[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W_x(e^{j\omega}) e^{j\omega k} d\omega$$



Винер – Хинчин
теоремасы (Хинчин –
Винер)

Сызықты инвариантты жүйеге әсері кезінде



$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} W_x(f) e^{j2\pi f \tau} df$$

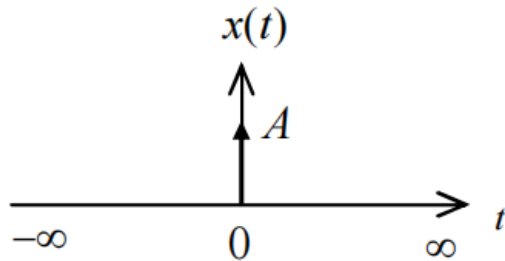
$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 W_x(f) e^{j2\pi f \tau} df = \int_{-\infty}^{\infty} W_y(f) e^{j2\pi f \tau} df$$

$$W_y(f) = |H(f)|^2 W_x(f)$$

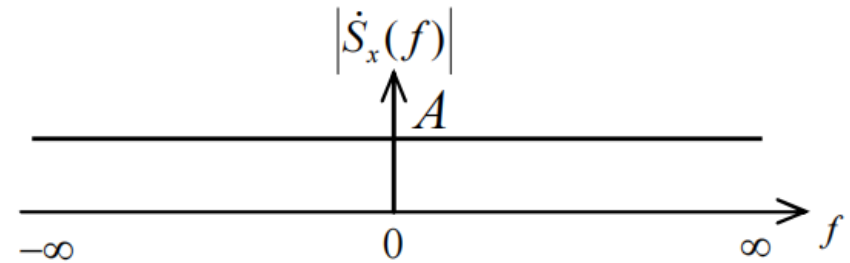
Сигналдардың және олардың спектрлерінің математикалық модельдері

Мысалы дельта функция және шексіз импульс спектрі

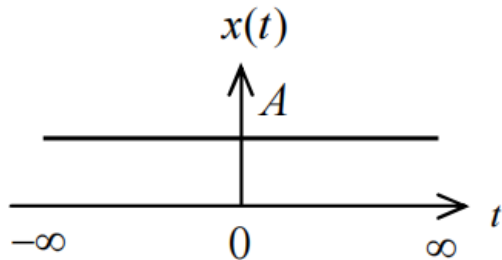
1) $x(t) = A\delta(t),$



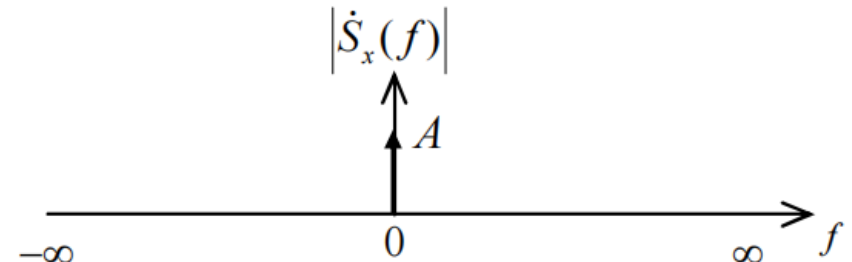
$$\dot{S}_x(f) = A;$$



2) $x(t) = A,$

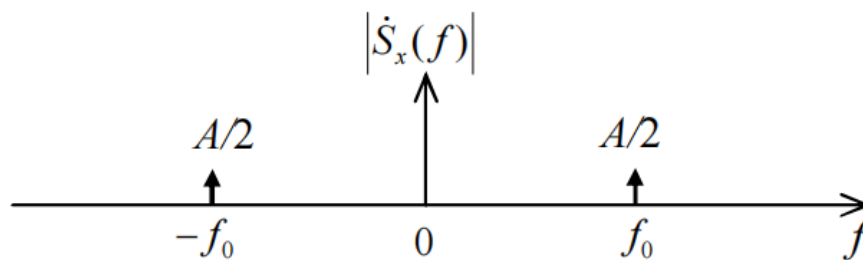
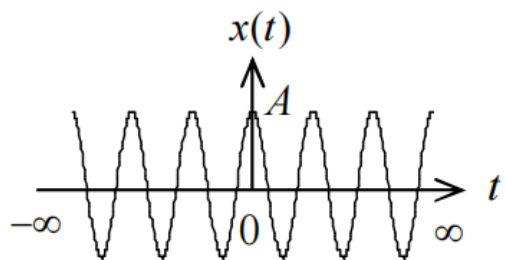


$$\dot{S}_x(f) = A\delta(f);$$

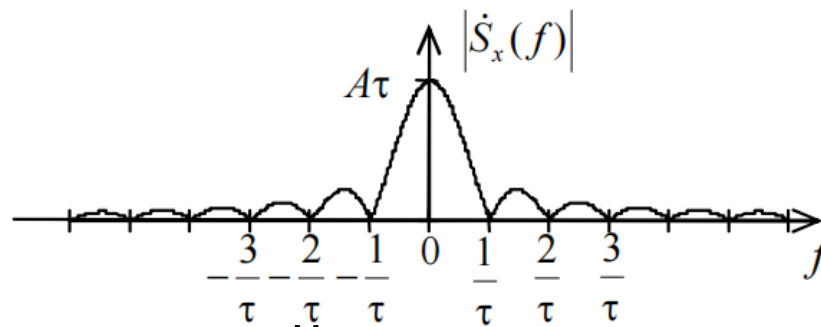
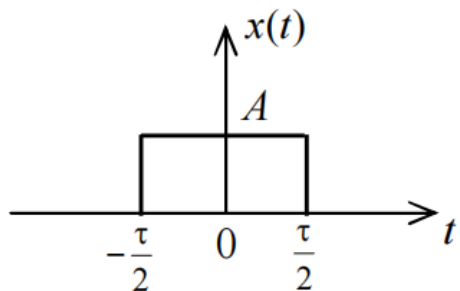


Синус және импульс спектрі

3) $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$ – гармоническое колебание, $\dot{S}_x(f) = \frac{A}{2} \delta(f - f_0) + \frac{A}{2} \delta(f + f_0)$;



4) $x(t)$ – одиночный прямоугольный импульс, $\dot{S}_x(f) = A\tau \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau}$;

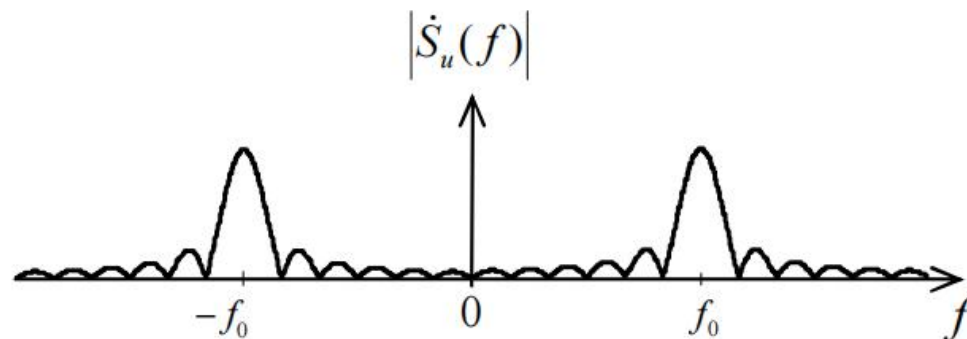
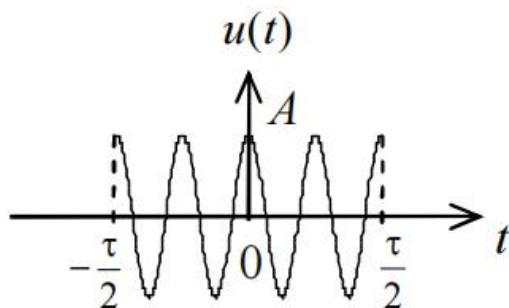


Импульс ұзақтығы артқан сайын спектр тар болады

Радиоимпульс спектрі

$$u(t) = x(t) \cos(2\pi f_0 t),$$

$$\dot{S}_u(f) = \frac{1}{2} \dot{S}_x(f - f_0) + \frac{1}{2} \dot{S}_x(f + f_0);$$



Сигналдардың энергиясы және орташа қуаты

$$E_x = \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt,$$

$$P_x = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt.$$

егер сигнал ұзақ болса, онда

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt,$$

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt.$$

Бақылау сұрақтары

- **Комплексті амплитуда әдісі**
- **Аналитикалық сигналды алу**
- **Сүзгі түрлендіргішінің сипаттамалары**
- **Экспоненциалды түрдегі аналитикалық сигнал**
- **Стационарлы және стационарлы емес кездейсоқ процесстер және оның өзгермейтін параметрлері**
- **Винер-Хинчин теоремасы, Корреляция интервалы және тиімді спектр ені**
- **Шуыл модельдері**
- **Сызықты инвариантты жүйеге әсері кезіндегі импульстік сипаттама**

Есептер

1. Берілген сигнал: $x(t) = \cos(2\pi 1000t) + \sin(2\pi 2000t)$.

Осы сигналдың **аналитикалық түрін** анықтаңыз.

2. Берілген сигнал: $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$. Осы сигналдың Гильберт түрлендірілген $\hat{x}(t)$ формуласын жазыңыз.

3. Кездейсоқ сигналдың автокорреляциялық функциясы берілген: $R_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$. Осы сигналдың қуат спектрлік тығыздығын табыңыз.

4. Берілген сигнал: $x(t) = Ae^{-t}$. Осы сигналдың жалпы энергиясын есептеңіз.

5. Төмендегі кездейсоқ процесстердің қайсысы стационарлы?

1. $X(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \Theta)$, мұнда Θ – бірқалыпты таралған шама.

2. $X(t) = At$.

3. $X(t) = Ae^{-\alpha t}W(t)$, мұнда $W(t)$ – ақ шуыл.

6. Берілген сигналдың автокорреляциялық функциясы:

$$R_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$$

Осы сигналдың корреляция интервалын табыңыз.